22107223

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES

Jeudi 20 mai 2010 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 10]*

La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est définie par

$$f(x)=2\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}.$$

(a) Montrez que f est une bijection. *[4 points]*

(b) Trouvez une expression de $f^{-1}(x)$. *[6 points]*

2. *[Note maximale : 10]*

La relation R est définie sur les matrices 2×2 par : $\boldsymbol{A}R\boldsymbol{B}$ si et seulement s'il existe une matrice non singulière $\boldsymbol{H}$ telle que $\boldsymbol{AH}=\boldsymbol{HB}$.

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence. *[7 points]*

(b) Étant donné que $\boldsymbol{A}$ est singulière et que $\boldsymbol{A}R\boldsymbol{B}$, montrez que $\boldsymbol{B}$ est aussi singulière. *[3 points]*

3. *[Note maximale : 14]*

(a) On considère l'ensemble $A=\{1, 3, 5, 7\}$ muni de l'opération binaire $*$, où $*$ représente la multiplication modulo 8.

(i) Donnez la table de Cayley pour $\{A, *\}$.

(ii) Montrez que $\{A, *\}$ est un groupe.

(iii) Trouvez toutes les solutions de l'équation $3*x*7=y$. Écrivez vos réponses sous la forme (x, y). *[9 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 3)

(b) On considère maintenant l'ensemble $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ muni de l'opération binaire $\otimes$, où $\otimes$ représente la multiplication modulo 10. Montrez que $\{B, \otimes\}$ n'est pas un groupe. *[2 points]*

(c) Un autre ensemble C peut être formé en enlevant un élément de B de telle sorte que $\{C, \otimes\}$ est un groupe.

(i) Précisez quel élément doit être enlevé.

(ii) Déterminez si $\{A, *\}$ et $\{C, \otimes\}$ sont ou ne sont pas isomorphes. *[3 points]*

4. *[Note maximale : 13]*

La permutation p_1 de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ est définie par

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Précisez l'élément symétrique de p_1.

(ii) Trouvez l'ordre de p_1. *[5 points]*

(b) Une autre permutation p_2 est définie par

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminez si la composition de p_1 et p_2 est ou n'est pas commutative.

(ii) Trouvez la permutation p_3 qui vérifie

$$p_1 p_3 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$ *[8 points]*

5. *[Note maximale : 13]*

Soit G un groupe cyclique fini.

(a) Démontrez que G est abélien. *[4 points]*

(b) Étant donné que a est un générateur de G, montrez que a^{-1} est aussi un générateur. *[5 points]*

(c) Montrez que si l'ordre de G est cinq, alors tous les éléments de G, sauf l'élément neutre, sont des générateurs de G. *[4 points]*